TD 1

Graphes (1) - exercices

Sources

— https://www.irif.fr/~francoisl/DIVERS/l3algo1617-TD2.pdf
— https://www.irif.fr/~francoisl/DIVERS/l3algo-td5-1011.pdf
— http://www.gymomath.ch/javmath/polycopie/th_graphe4.pdf
— Feuille de TD L3 ENSL.
— Diverses Annales

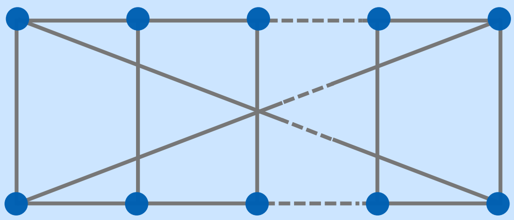
1.1 Exercices élémentaires (TD)

1.1.1 Degré, connexité

EXERCICE #1 ► **Une preuve par construction**
Un graphe est dit k-régulier si tous ses sommets sont de degré k. Prouver la propriété suivante :

Pour tout entier n pair, $n > 2$, il existe un graphe 3-régulier composé de n sommets.

Solution. Preuve par construction : Pour $n = 3$ le triangle répond à la question. IL y a plusieurs constructions possibles, le graphe “en cercle” (2-régulier donc) dans lequel on lie le noeud $k < \frac{n}{2}$ avec le noeud $k + \frac{n}{2}$, ou celui-là :



EXERCICE #2 ► **Degré**
Si m est le nombre d’arêtes d’un graphe G, montrer que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m.$$

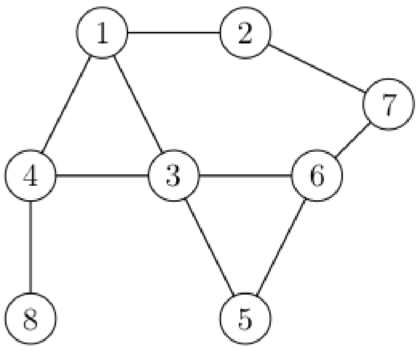
Solution. Récurrence sur m sans pb, en enlevant une arête deux sommets ont une arité moindre.

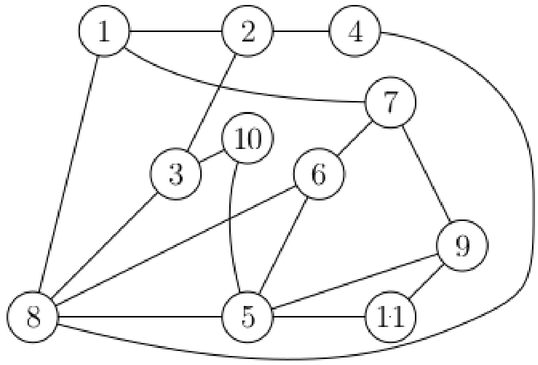
EXERCICE #3 ► **Connexité**
Montrez que tout graphe connexe à n sommets a au moins n arêtes.

Solution. Rec sur n, mais rec avec précédesseurs Moins facile, car quand on enleve une arête on n’a pas la connexité. Raisonner sur les composantes connexes du graphe obtenu.

1.1.2 Parcours

EXERCICE #4 ► **Parcours en largeur**
Pour chacun des graphes suivants, donner l’ordre des noeuds rencontrés lors d’un parcours en largeur, en partant du sommet 1. Donner l’arbre résultant de ce parcours.





Quelle est la complexité du parcours en largeur avec les listes d'adjacence ?

Solution. 1 2 3 4 7 5 6 8 puis 1 2 7 8 3 4 6 9 5 10. n+m sf slide 51 de OB.

EXERCICE #5 ► **Profondeur**
Donner l'ordre des noeuds visités dans le parcours en profondeur des deux graphes précédents à partir du noeud 1.

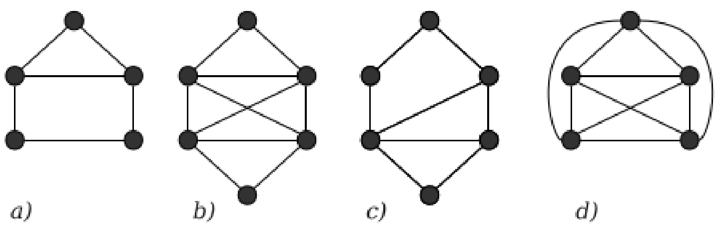
Solution. 1 2 7 6 5 3 4 8 , puis flemme.

EXERCICE #6 ► **Applications des parcours**
Proposer un algorithme qui permet de déterminer si un graphe contient un cycle.

Solution. Avec un parcours en prof d'abord, la seule difficulté est de s'arrêter au bon moment.

1.1.3 Cycles : graphes eulériens/hamiltoniens

EXERCICE #7 ► **Cycles Eulériens**
Un chemin est dit eulérien si il passe une et une seule fois par chacune des *arêtes* du graphe. Les graphes suivants possèdent-ils un cycle eulérien ?



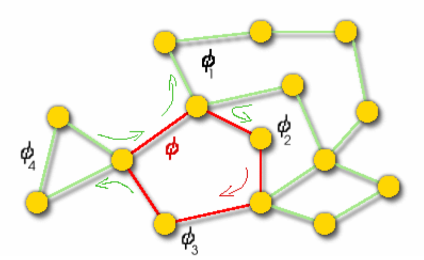
EXERCICE #8 ► **CNS Chemin Eulérien**
Montrer qu'un graphe admet un chemin eulérien ssi il est connexe et au plus 2 de ses sommets sont de degré impair.

Solution.

Preuve. Supposons qu'un graphe G soit eulérien. Il existe alors un cycle c parcourant une et une seule fois chaque arête. Le graphe G est donc connexe, puisque c relie tous les sommets entre eux. Considérons un sommet x. Lors du parcours du cycle, à chaque fois que nous passons par lui, nous y arrivons et nous en repartons par 2 arêtes non encore parcourues. Le sommet x est donc de degré pair.

Réciproquement considérons un graphe G connexe dont tous les sommets de degré pair. Nous allons montrer par induction sur le nombre d'arêtes que G est alors eulérien.

- Si G se réduit à un unique sommet isolé, il est évidemment eulérien.
- Sinon tous les sommets de G sont de degré supérieur ou égal à 2. Ceci implique qu'il existe un cycle ϕ sur G. Considérons le graphe partiel H constitué des arêtes en dehors du cycle ϕ. Les sommets de H sont également de degré pair, le cycle contenant un nombre pair d'arêtes incidentes pour chaque sommet. Par induction chaque composante connexe Hi de H est un graphe eulérien, et admet donc un cycle eulérien ϕ_i. Pour reconstruire un cycle eulérien sur G, il nous suffit de fusionner le cycle ϕ avec les différents cycles ϕ_i. Pour cela on parcours le cycle ϕ depuis un sommet arbitraire; lorsque l'on rencontre pour la première fois un sommet x appartenant à Hi, on lui substitue le cycle ϕ_i. Le cycle obtenu est un cycle eulérien pour G, le cycle ϕ et les cycles ϕ_i formant une partition des arêtes.



Le cycle ϕ représenté en rouge définit 4 composantes connexes pour le graphe H, dont 2 sommets isolés pour lesquels leur cycle eulérien est sans arête.

Les flèches vertes symbolisent l'opétation de fusion des 2 cycles non vide avec ϕ.

EXERCICE #9 ▸ **Graphes Hamiltoniens**

Un cycle est dit Hamiltonien ssi il passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe.

Les graphes suivants possèdent-ils un cycle hamiltonien ?

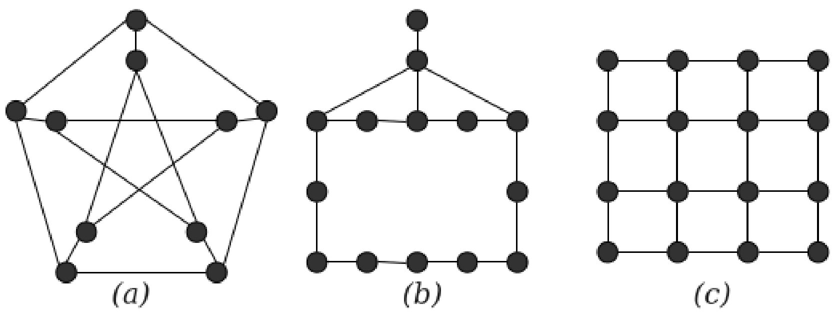


FIGURE 3 – (a) Graphe de Petersen 3-régulier, (b) maison agrandie, (c) grille

Donner un algorithme pour déterminer si un tel cycle existe.

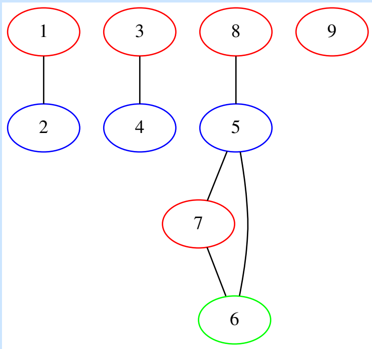
1.1.4 Coloriages

EXERCICE #10 ▸ **Un exemple simple**

Avec l'algorithme polynomial vu en cours (simplification de Kempe), colorier le graphe suivant :

1 —— 2
3 —— 4

6
/ \
7 —— 5 —— 8



Solution.

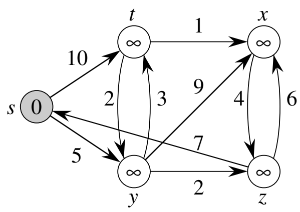
<u>EXERCICE #11</u> ► **Coloriage et Bipartisme**
On dit qu'un graphe est biparti si on peut partitionner ses sommets en deux ensembles V_1 et V_2 de sorte qu'il n'y ait aucune arête entre deux sommets de V_1 (resp. de V_2). Les seules arêtes joignent donc un sommet de V_1 à un sommet de V_2.

1. Montrer qu'un graphe à n sommets est n-coloriable. Donner un graphe à 5 sommets qui n'est pas 4 coloriable.
2. Montrer qu'un graphe est deux coloriable ssi il est biparti.

Solution. à rédiger

1.1.5 Distances

<u>EXERCICE #12</u> ► **Dijkstra**
Appliquer l'algorithme au graphe suivant (source = s) :



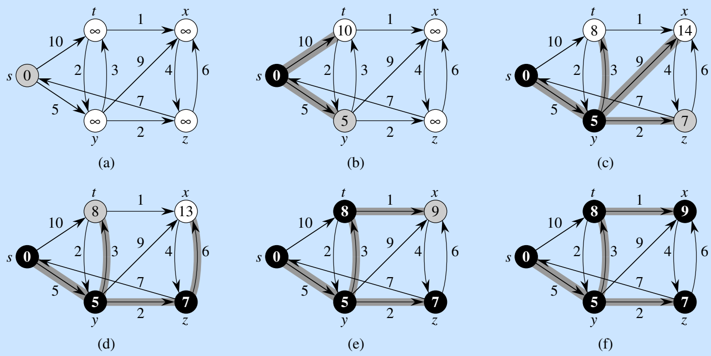


Figure 24.6 L'exécution de l'algorithme de Dijkstra. L'origine s est le sommet le plus à gauche. Les estimations de plus court chemin sont représentées à l'intérieur des sommets, et les arcs en gris indiquent les prédécesseurs. Les sommets noirs sont dans l'ensemble E, et les sommets blancs sont dans la file de priorités min $F = S - E$. **(a)** La situation juste avant la première itération de la boucle **tant que** des lignes 4–8. Le sommet gris contient la valeur minimale de d et est choisi comme sommet u à la ligne 5. **(b)–(f)** La situation après les itérations successives de la boucle **tant que**. A chaque étape, le sommet gris est celui choisi comme sommet u à la ligne 5 de l'itération suivante. Les valeurs d et π représentées en (f) sont les valeurs finales.

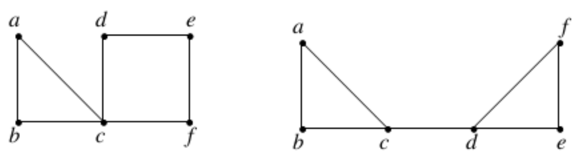
Solution.

1.1.6 Exercices plus avancés

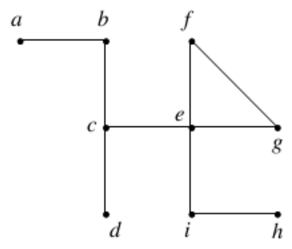
EXERCICE #13 ▸ **Application : fiabilité des réseaux - notion de coupure - facultatif**
Si on considère un réseau informatique où tout le monde doit communiquer avec tout le monde, il est important que le graphe associé soit connexe. Maintenant, il faut aussi que le retrait d'une machine (ou d'un lien) soit sans douleur, d'où les définitions suivantes :

> Le retrait d'un sommet et de toutes les arêtes incidentes à ce sommet conduit à former un sous-graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial. Ces sommets sont appelés **points de coupure**. Le retrait d'un point coupure à partir d'un graphe connexe produit un sous-graphe qui n'est pas connexe. De façon similaire, une arête dont le retrait produit un graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial est appelée un **séparateur**.

Dans les graphes suivants trouver les points de coupure et les séparateurs :



F *G*



H

Solution. F : coupure c et pas de séparateur ; pour G c et d sont des coupures, (c,d) un séparateur. Pour H b,c,e,i sont des coupures, (c,e) un séparateur et (cd aussi)