DIU EIL Bloc 5

Graphes : clôture transitive, distances

Laure Gonnord

http://laure.gonnord.org/pro/

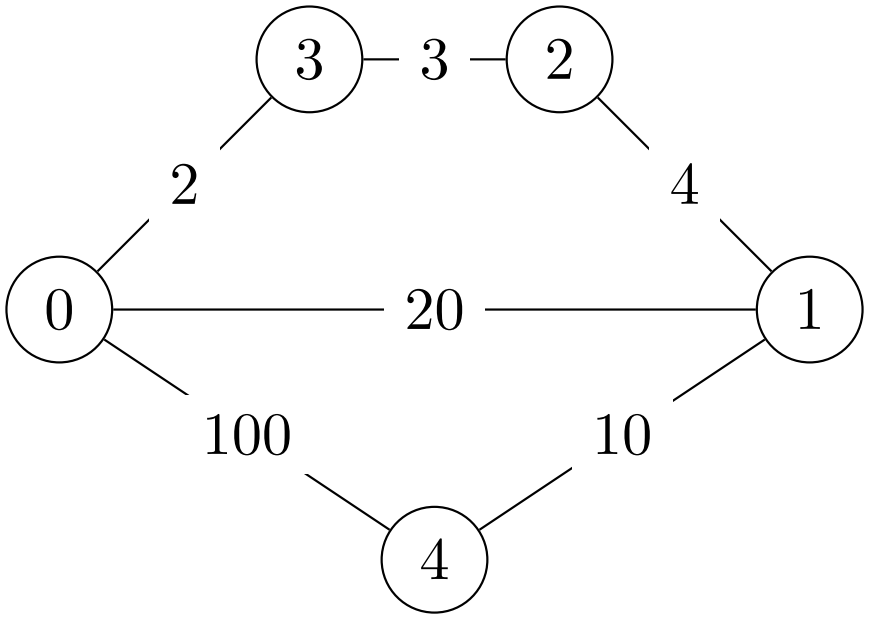
Laure.Gonnord@univ-lyon1.fr

DIU EIL, Dpt Info UCBL

Bloc 5 2019-20

1. Distances
   - Algorithme naïf
   - Floyd-Warshall
   - Dijkstra

Le problème



Distance entre...

- deux sommets ;
- ou bien tous les couples de sommets.

Crédit slides : S. Gonnord

1. Distances
   - Algorithme naïf
   - Floyd-Warshall
   - Dijkstra

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes.**
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$G = \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$G = \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 102 \\ 30 & 10 & 14 & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 102 \\ 30 & 10 & 14 & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 102 \\ 30 & 10 & 14 & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 30 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 30 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 30 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Distances
   - Algorithme naïf
   - Floyd-Warshall
   - Dijkstra

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$G = \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$G = \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 102 \\ 100 & 10 & \infty & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 102 \\ 100 & 10 & \infty & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 102 \\ 100 & 10 & \infty & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 32 \\ 30 & 10 & 14 & 32 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 32 \\ 30 & 10 & 14 & 32 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 32 \\ 30 & 10 & 14 & 32 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Warshall pour la clôture transitive

"il existe un chemin...." :

$$C_k[i,j] = C_{k-1}[i,j] \text{ or } (C_{k-1}[i,k] \text{ and } C_{k-1}[k,j])$$

1. Distances
   - Algorithme naïf
   - Floyd-Warshall
   - Dijkstra

Algorithme de Dijkstra $G = (V, E)$

Dessin

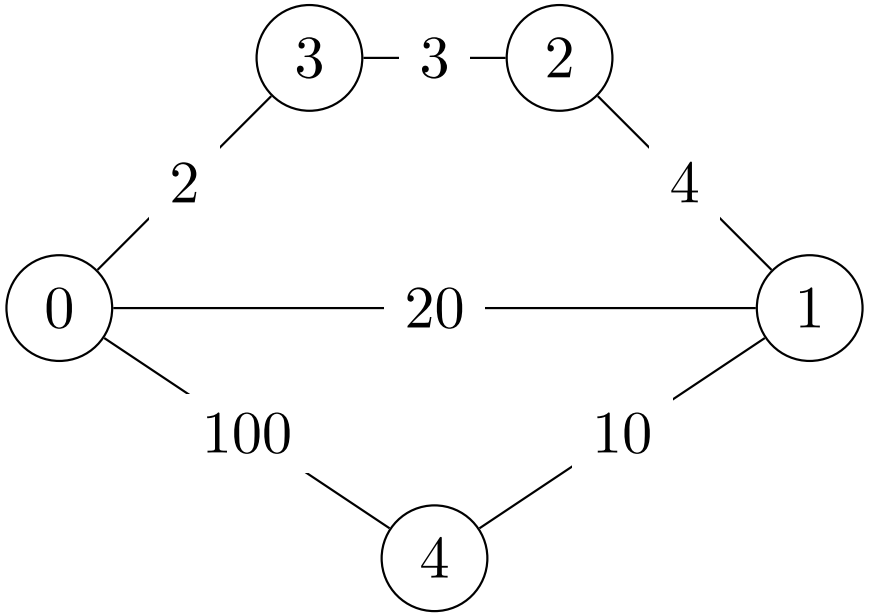
- Distances à UN sommet s_0
- Idée : partition $V = \mathcal{S} \cup \mathcal{Q}$, avec $\mathcal{S}$ qui grossit.
  - la distance des $s \in \mathcal{S}$ à s_0 est connue.
  - pour $s \in \mathcal{Q}$, on connaît la distance à s_0 via $\mathcal{S}$

Algorithme de Dijkstra $G = (V, E)$

Dessin

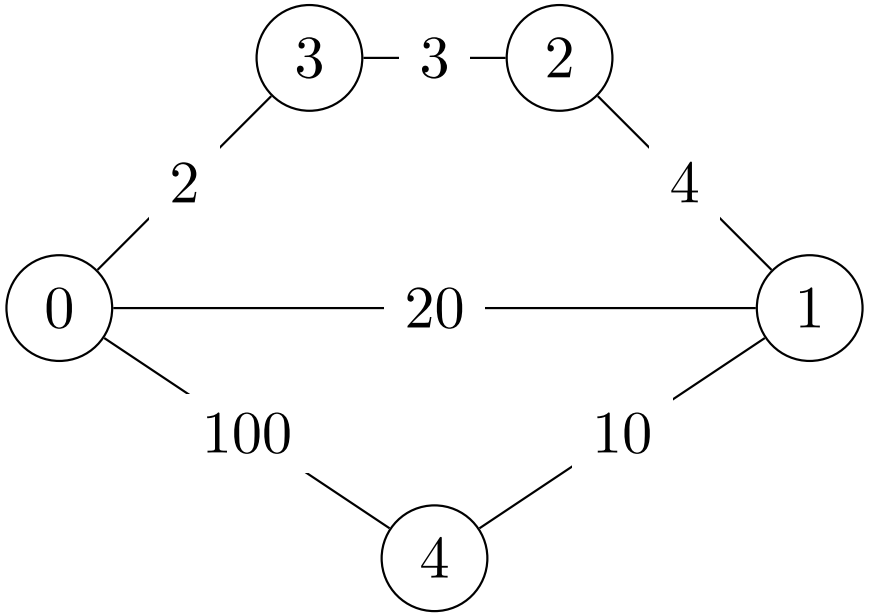
- Distances à UN sommet s_0
- Idée : partition $V = \mathcal{S} \cup \mathcal{Q}$, avec $\mathcal{S}$ qui grossit.
  - la distance des $s \in \mathcal{S}$ à s_0 est connue.
  - pour $s \in \mathcal{Q}$, on connaît la distance à s_0 via $\mathcal{S}$
- À chaque étape, on choisit u le sommet de $\mathcal{Q}$ à plus petite distance de s.
  - on le bascule dans $\mathcal{S}$;
  - pour chacune de ses arêtes (u, v) avec $v \in \mathcal{Q}$, on met à jour la nouvelle distance de v à s via $\mathcal{S}$.
- Complexité ?
  - $|V|^2$ avec matrice d'adjacence ...
  - ou $|E| \ln |E|$ avec liste d'adjacence et tas.

Dijkstra sur l'exemple



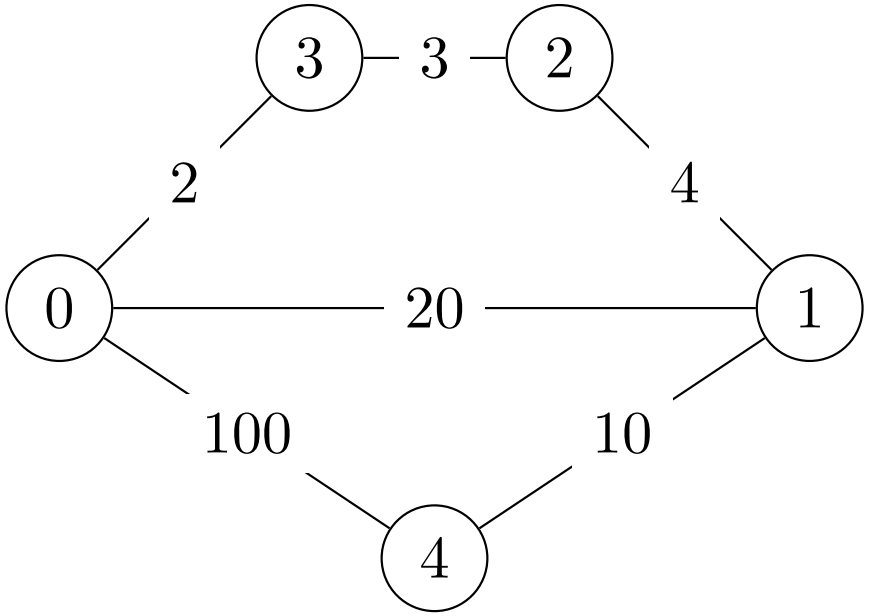
$\mathcal{S}$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100

Dijkstra sur l'exemple



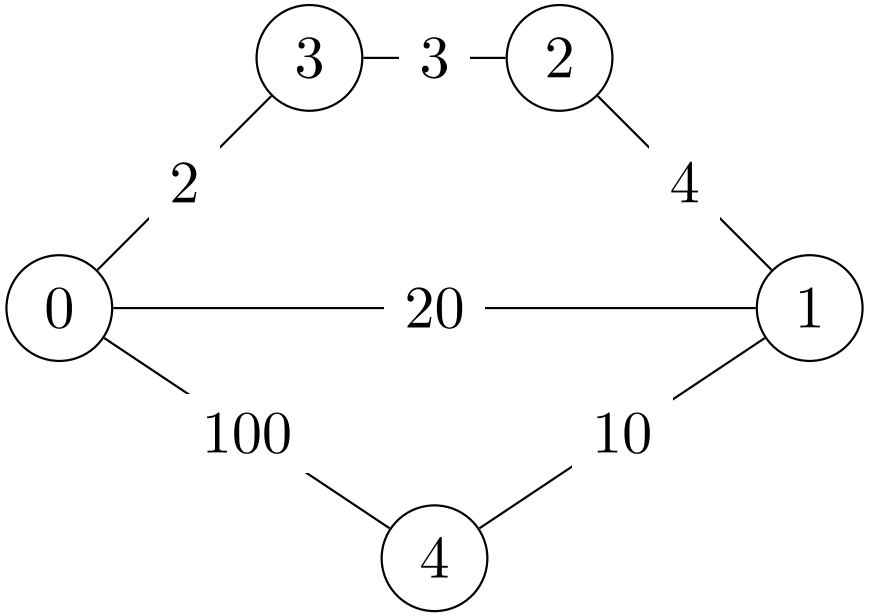
$\mathcal{S}$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100
$\{0,3\}$	0	20	$\boxed{5}$	2	100

Dijkstra sur l'exemple



$\mathcal{S}$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100
$\{0,3\}$	0	20	$\boxed{5}$	2	100
$\{0,3,2\}$	0	$\boxed{9}$	5	2	100

Dijkstra sur l'exemple



$\mathcal{S}$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100
$\{0,3\}$	0	20	$\boxed{5}$	2	100
$\{0,3,2\}$	0	$\boxed{9}$	5	2	100
$\{0,3,2,1\}$	0	9	5	2	19

Et je veux le chemin ?

Une info supplémentaire Il faut en plus garder le précédesseur sur le chemin le plus court.

slides O. Bournez

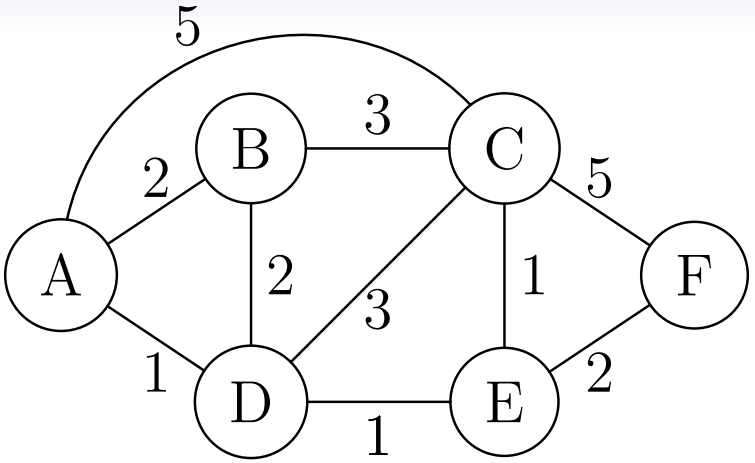
Algorithme de Dijkstra

Entrée : $\begin{cases} \text{Un graphe } G = (V, E) \text{ avec une source } s \\ \text{Une fonction de poids } w : E \to \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Sortie: $\begin{cases} \text{Un vecteur distance } d \\ \text{Une fonction père } \pi : V \to V \end{cases}$

1. Initialisation de la source s
   1.1 $d[s] \leftarrow 0$; $\pi[s] \leftarrow s$
   1.2 Pour chaque sommet v de V faire $\begin{cases} \pi(v) \leftarrow NIL \\ d(v) \leftarrow \infty^+ \end{cases}$
2. $\mathcal{Q} \leftarrow V$; $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$;
3. Tant que $(\mathcal{Q} \neq \emptyset)$ faire
   3.1 $u \leftarrow$ Extraire-Le-Minimum$(\mathcal{Q}, d)$;
   3.2 $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{u\}$;
   3.3 Pour chaque sommet v voisin de u faire
   Si $(d[v] > d[u] + w(u, v))$ alors $\begin{cases} d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v) \\ \pi(v) \leftarrow u \end{cases}$
4. retourner d et π

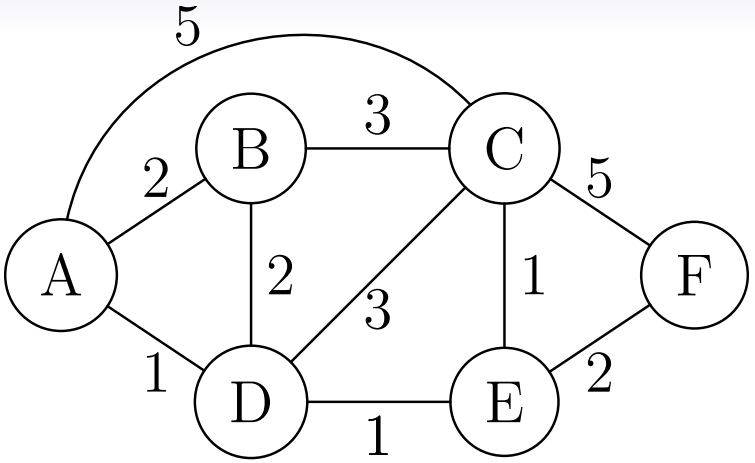
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	$\mathcal{Q}$	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$

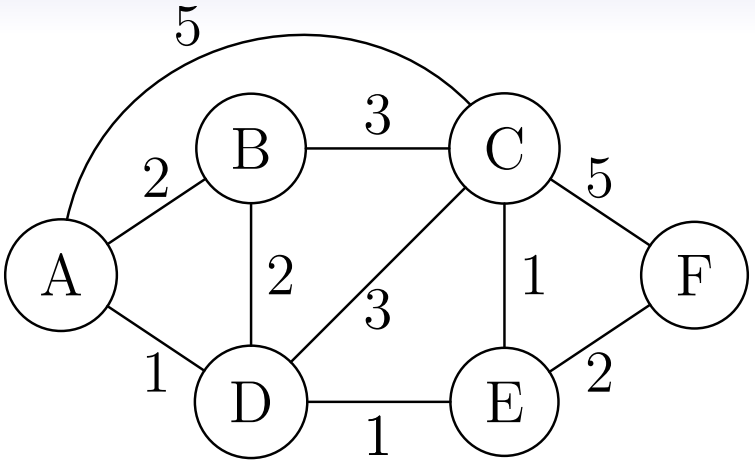
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	$\mathcal{Q}$	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$

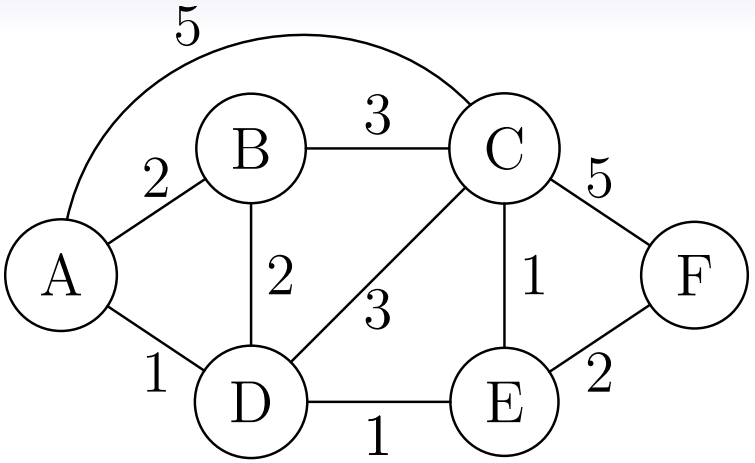
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	$\mathcal{Q}$	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$

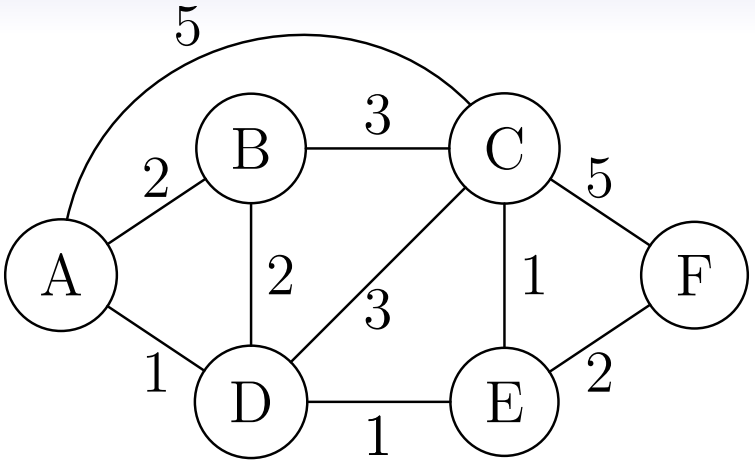
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	$\mathcal{Q}$	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
3	$\{CEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$

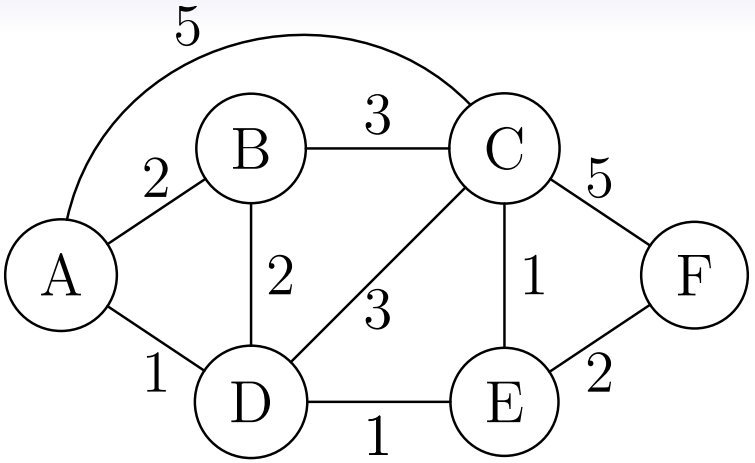
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	$\mathcal{Q}$	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
3	$\{CEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
4	$\{CF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$

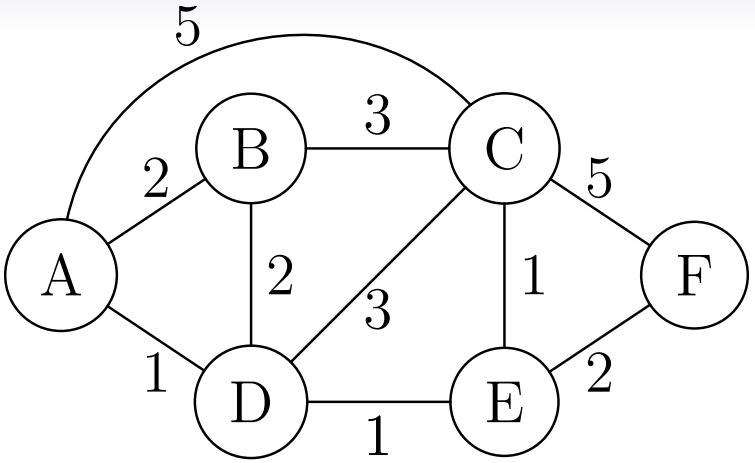
Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	$\mathcal{Q}$	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
3	$\{CEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
4	$\{CF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$
5	$\{F\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$

Exemple



les couples correspondent à $(d(.), \pi(.))$

	$\mathcal{Q}$	A	B	C	D	E	F
I	$\{ABCDEF\}$	$(0, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
1	$\{BCDEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(5, A)$	$(1, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
2	$\{BCEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
3	$\{CEF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(4, D)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(\infty, \emptyset)$
4	$\{CF\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$
5	$\{F\}$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$
6	$\emptyset$	$(0, A)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(1, A)$	$(2, D)$	$(4, E)$

Complexité de l'algorithme: $O(|V|^2)$

More docs on graphs

- In french : `http://laure.gonnord.org/site-ens/mim/graphes/cours/cours_graphes.pdf` or type “cours de Théorie des graphes” in Google
- In english : an interactive tutorial here : `http://primes.utm.edu/cgi-bin/caldwell/tutor/graph/intro`.
- (en) The theorical book “Graph Theory”, R. Diestel (electronic version : `http://diestel-graph-theory.com/basic.html`)
- (en) e-book for algorithms : `http://code.google.com/p/graph-theory-algorithms-book/`